数理解析研究所講究録
57巻 1968年 1-23

Banach束における submarkov 半群について.

名大理. 国田 寛

Banach束における正の contraction 半群の infinitesimal generator による特徴づけに関しては, Phillips [3], Hasegawa [1], Sato [4] の結果がある. これらの結果は, 特にBanach束が, C = 連続函数の全体又は L^{∞} のときは, submarkov 半群の特徴づけになっている. しかし Markov 過程にこの種の議論を応用するためには, L^2 を含む一般の Banach 束で submarkov 半群を生成する infinitesimal generator を特徴づけることが重要である. §1 では Sato によって導入されたBanach束上の functional τ を用いて, この特徴づけを行いたい. §2 では §1 の結果を用いて Dirichlet space の構造を調べる. これは M. Ito [2] によって得られた非対称な Dirichlet space に関する結果と密接に関連している. §3 ではいくつかの例をのべる.

§1. Submarkov semigroup と infinitesimal generator.

X を vector 束とする. 以下定義及び記号はことわらない

かぎり Yosida [ ] にしたがう. 例えば $f^+=f\vee 0$, $f^-=f\wedge 0$, $|f|=f^++f^-$ 等である. X' の元 $e>0$ が次の条件をみたすとき unit とよび, 今後 e を固定する.

$$O\text{-}\lim_{c\uparrow+\infty} f\wedge ce=f \quad , \qquad \forall f\in X'.$$

ただし, f が $\{f_n\}$ の O-lim とは $|f-f_n|\leq g_n$, $g_n\downarrow 0$ をみたす $\{g_n\}$ がとれることである. X' の subvector 束 X が $\forall f\in X \Rightarrow f\wedge e\in X$ をみたすとき, complete と呼ぶことにする. X' の subvector 束 X 上に定義された norm (完備) が $|f|\leq|g| \Rightarrow \|f\|\leqq\|g\|$ をみたすとき, $(X,\|\ \|)$ を Banach 束という. 以下 complete な Banach 束 X を固定する.

Hasegawa [ ] 及び Sato [ ] にしたがって $X\times X$ 上の functional τ 及び σ を次の様に定義する

$$\tau(f,g)=\lim_{a\downarrow 0}\frac{1}{a}\left(\|f+ag\|-\|g\|\right)$$

$$\sigma(f,g)=\inf\tau(f,\ g+h\vee(-\ell f))$$

ただし inf は $|h|\wedge f=0$ なるすべての $h\in X$ と $\ell\in[0,+\infty)$ に関して取る.

Proposition 1.1. $f\geqq 0$ とする.

(i) $-\|g^-\|\leqq\sigma(f,g)\leqq\|g^+\|$. 特に $\sigma(f,0)=0$.

(ii) $\sigma(f,\alpha g)=\alpha\sigma(f,g)$, $\forall\alpha\geqq 0$.

(iii) $\sigma(f,\ af+g) = a\|f\| + \sigma(f,g) \qquad \forall a$

(iv) $\sigma(f,\ g+h) \leqq \sigma(f,g) + \sigma(f,h)$. 特に $\sigma(f,-g) \geqq -\sigma(f,g)$.

(v) $g \leqq h \Rightarrow \sigma(f,g) \leqq \sigma(f,h)$

(vi) $f \wedge |h| = 0 \Rightarrow \sigma(f,g) = \sigma(f,g+h)$

特に $f \wedge |g| = 0 \Rightarrow \sigma(f,g) = 0$.

(vii) $f \wedge g \leqq 0 \Rightarrow \sigma(f,g) \leqq 0$

$f \wedge (-g) \leqq 0 \Rightarrow \sigma(f,g) \geqq 0$.

上の (i) ~ (vi) の証明は [4] にある. (vii) の前半の不等式の証明のためには, $f \wedge g \leqq 0 \Rightarrow f \wedge g^+ = 0$ を示せばよい. 実際このことと, (i) 及び (vi) から (vii) の前半はただちに得られる. $f \wedge g^+ + g^- = (f+g^-) \wedge (g^+ + g^-) \leqq f \wedge g \leqq 0$. だから, $f \wedge g^+ \leqq -g^-$. ゆえに $(f \wedge g^+) \wedge g^+ \leqq (-g^-) \wedge g^+ = 0$. これより $f \wedge g^+ \leqq 0$. $f \vee g^+ \geqq 0$ は明らか. これで $f \wedge g \leqq 0 \Rightarrow f \wedge g^+ = 0$ が言えた. (vii) の後半は, (vii) の前半と (iv) の後半から明らか.

<u>定義 1.1</u> $X \to X$ の bounded linear operator の system $T_t, t \geqq 0$ が次の条件をみたすとき, submarkov semigroup と略称する.

(T.1) $T_t \cdot T_s = T_{t+s}$, $\quad T_0 = I = \text{identity}$

(T.2) $\lim_{t \downarrow 0} T_t f = f$ (strongly), $\quad \forall f \in X$.

(T.3) $\|T_t\| \leqq e^{\beta_0 t}$, $\forall t \geqq 0$ をみたす $\beta_0 \geqq 0$ が存在.

(T.4) $f \geqq 0 \Rightarrow T_t f \geqq 0$, $\forall t \geqq 0$.

(T.5) $f \leqq e \Rightarrow T_t f \leqq e$, $\forall t \geqq 0$.

定義 1.2. $X \to X$ の linear operator A が completely dispersive とは

$$\sigma((f-ce)^+, Af) \leqq \beta_0 \|(f-ce)^+\|, \quad \forall f \in \mathcal{D}(A), \ \forall c \geqq 0$$

をみたす $\beta_0 \geqq 0$ が存在すること. ただし $(f-ce)^+ = f - f \wedge ce$.

定理 1.1. X における linear operator A に対し, 次の (a), (b) は同値.

(a) A はある submarkov semigroup の infinitesimal generator.

(b) A は completely dispersive, $\mathcal{D}(A)$ は dense かつ ある $\beta_0 \geqq 0$ が存在して,

(1.1) $$\mathcal{R}(\alpha - A) = X, \quad \forall \alpha \geqq \beta_0.$$

特に A が有界作用素のときは, (a), (b) は次の (c) と同値.

(c) $\mathcal{D}(A) = X$ かつ

(1.2) $$\sigma((f-ce)^+, A(f \wedge ce)) \leqq 0, \quad \forall c \geqq 0, \ \forall f \in X.$$

証明. (a) $\Rightarrow$ (b). 以下, $ce = c$ と書くことにする. $\|T_t\| \leqq e^{\beta_0 t}$ をみたす β_0 をとる.

$$(T_t - I)f = (T_t - I)(f-c)^+ + (T_t - I)f\wedge c$$
$$= (e^{-\beta_0 t}T_t - I)(f-c)^+ + (1 - e^{-\beta_0 t})T_t(f-c)^+ + (T_t - I)f\wedge c$$

だから, Prop 1.1, (iv) より

$$(1.3) \quad \sigma((f-c)^+, (T_t - I)f) \leqq \sigma((f-c)^+, (e^{-\beta_0 t}T_t - I)(f-c)^+)$$
$$+ \sigma((f-c)^+, (1-e^{-\beta_0 t})T_t(f-c)^+)$$
$$+ \sigma((f-c)^+, (T_t - I)f\wedge c).$$

右辺の才一項 $\leqq \sigma((f-c)^+, e^{-\beta_0 t}T_t(f-c)^+) - \|(f-c)^+\|$ (by (iii))

$\leqq e^{-\beta_0 t}\|T_t(f-c)^+\| - \|(f-c)^+\|$ (by (i))

$\leqq 0$.

$$\frac{\text{才二項}}{t} \xrightarrow[t \downarrow 0]{} \beta_0 \|(f-c)^+\|.$$

才三項は $(f-c)^+ \wedge \{(T_t - I)f\wedge c\} \leqq 0$ より (vii) によって負.
したがって (1.3) の両辺を $t>0$ で割り, $t \to 0$ とすれば
$\sigma((f-c)^+, Af) \leqq \beta_0 \|(f-c)^+\|$.

b) $\Rightarrow$ a) の証明のために, まず $(\alpha - A)f = g \leqq 0 \Rightarrow f \leqq 0$
が $^\forall \alpha > \beta_0$ で成立することを示す. Prop. 1 (iii) (v) より

(i−)
$$\beta_0\|f^+\| \geqq \sigma(f^+, \alpha f^+ + \alpha f^- - g)$$
$$= \alpha\|f^+\| + \sigma(f^+, -g)$$
$$\geqq \alpha\|f^+\|.$$

ゆえに $\|f^+\|=0$ 即ち $f \leqq 0$ を得る。又上の事実から、$(\alpha-A)f=0$ から $f=0$ がしたがう。したがって、$\alpha>\beta_0$ では $(\alpha-A)^{-1}$ が存在する。$G_\alpha=(\alpha-A)^{-1}$ とおく。

次に $\|G_\alpha\| \leqq \frac{1}{\alpha-\beta_0}$ $(\forall\alpha>\beta_0)$ を示そう。$g\geqq 0$ のとき $f=G_\alpha g \geqq 0$ だから、(1.4) より
$$\beta_0\|f\| \geqq \alpha\|f\| + \sigma(f,-g) \geqq \alpha\|f\| - \alpha\sigma(f,g) \quad (\text{by iv}),$$

即ち $\sigma(u,g) \geqq (\alpha-\beta_0)\|f\|$. Prop 1.1 (i) を使うと $\|g\| \geqq (\alpha-\beta_0)\|f\|$.
一般の $g\in X$ に対しては、
$$|G_\alpha g| \leqq |G_\alpha g^+| + |G_\alpha g^-| = G_\alpha g^+ - G_\alpha g^- = G_\alpha|g|$$
だから
$$\|G_\alpha g\| \leqq \|G_\alpha|g|\| \leqq \frac{1}{\alpha-\beta_0}\||g|\| = \frac{1}{\alpha-\beta_0}\|g\|.$$

ゆえに $\|G_\alpha\| \leqq \frac{1}{\alpha-\beta_0}$ が得られた。

上の結果から、Hille-Yosida の定理によって、A を infinitesimal generator にもつ semigroup T_t が一意に定まる。T_t は $\|T_t\| \leqq e^{\beta_0 t}$ をみたす。(T.4) 及び (T.5) を証明す

るためには

$$(1.5)\qquad 0 \le g \le e \implies 0 \le \alpha G_\alpha g \le e \quad , \ \forall \alpha > \beta_0$$

を示せば十分である。実際、Hille-Yoshida の semigroup の表現

$$(1.6)\qquad T_t g = \lim_{\alpha \to \infty} T_t^{(\alpha)} g$$

$$T_t^{(\alpha)} g = \exp(-\alpha t) \sum \frac{(\alpha t)^n}{n!} [\alpha G_\alpha]^n g$$

において、(1.5) を使って、$T_t^{(\alpha)}$ の submarkov 性、したがって、T_t の submarkov 性がわかる。 $g \ge 0 \implies G_\alpha g \ge 0$ はすでに示したから、 $g \le \alpha \implies f = G_\alpha g \le e$ を示す。

仮定より

$$\sigma((f-e)^+, Af) = \sigma((f-e)^+, \alpha f - g) \le \beta_0 \|(f-e)^+\|.$$

ゆえに

$$0 \ge \sigma((f-e)^+, \alpha f - g - (f-e)^+)$$

$$= \sigma((f-e)^+, (\alpha-\beta)(f-e)^+ + \alpha(f \wedge e) - g)$$

$$= (\alpha-\beta)\|(f-e)^+\| + \sigma((f-e)^+, \alpha(f\wedge e) - g).$$

一方

$$\{-(f-e)^+\} \vee \{\alpha(f \wedge e) - g\} \ge 0$$

だから Prop. 1.1, (vii) によって $\sigma((f-e)^+, \alpha(f\wedge e) - g) \ge 0.$

したがって，$\|(f-c)^+\| = 0$，即ち $f \leq c$ を得る．

つぎに (a) $\Rightarrow$ (c)。(a) $\Rightarrow$ (b) の証明の段階で，不等式

$$\tau((f-c)^+, (T_t - I)f \wedge c) \leqq 0$$

を示した．これより $\tau((f-c)^+, Af \wedge c) \leqq 0$ を得る．

(c) $\Rightarrow$ (b)。A は有界作用素だから，ある $\beta_0 \geqq 0$ があって

$$|\tau(f, Af)| \leqq \|Af\| \leqq \beta_0 \|f\|.$$

ゆえに

$$\tau((f-c)^+, Af) \leqq \tau((f-c)^+, A(f-c)^+) + \tau((f-c)^+, Af \wedge c)$$
$$\leqq \beta_0 \|(f-c)^+\|.$$

$\alpha > \beta_0$ で $R(\alpha - A) = X$ となることは，A がある semi-group の infinitesimal generator になることから明らか．（証明終）

注意 1. A を dense な domain $\mathcal{D}(A)$ で定義され，かつ十分大きな α に対し $R(\alpha - A) = X$ をみたす linear operator とする．A に対応する semi-group が存在すれば，それを $T_t(A)$ と書くことにする．定理 1.1 の証明から，次のことは容易にわかる．

(I). (T.1) ～ (T.3) をみたす $T_t(A)$ が存在する．

$\Longleftrightarrow$ ある $\beta_0 \geqq 0$ があって，$\tau(f, Af) \leqq \beta_0 \|f\|$，$\forall f \in \mathcal{D}(A)$

(II). (T.1) ～ (T.4) をみたす $T_t(A)$ が存在する.

$\Leftrightarrow$ ある $\beta_0 \geqq 0$ があって, $\sigma(f^+, Af) \leqq \beta_0 \|f^+\|$, $\forall f \in \mathcal{D}(A)$

(III). (T.1)～(T.3) 及び (T.5) をみたす $T_t(A)$ が存在する.

$\Leftrightarrow$ ある $\beta_0 \geqq 0$ があって, $\sigma((f-e)^+, Af) \leqq \beta_0 \|(f-e)^+\|$

かつ $\sigma(f, Af) \leqq \beta_0 \|f\|$ が $\forall f \in \mathcal{D}(A)$ で成立する.

注意 2. 定理1.1 の証明では, σ の定義にもどることなく, Prop. 1.1 の性質のみを用いた. したがって, Prop. 1.1 の諸性質あるいは, もっと弱い性質をもつ, $X \times X$ 上の functional が与えられている場合も当然定理1.1 が成りたつ. 特に Prop. 1.1 の (iv) subadditivety が $\forall f \in X$ でなりたつ場合は次の結果が成立する.

定理1.1′ A は dense な domain $\mathcal{D}(A)$ で定義された linear operator で, 十分大きな α に対して $\mathcal{R}(\alpha - A) = X$ をみたすとする. このとき定理1.1 の (a), (e) は更に次の条件と同値である.

(e′) $\sigma(f - Uf, Af) \leqq \beta_0 \|f - Uf\|$, $\forall f \in \mathcal{D}(A)$

ただし $Uf = f^+ \wedge e$.

更に, A が有界のとき, (c) は次の (c′) と同値である.

(c′) $\sigma(f - Uf, AUf) \leqq 0$, $\forall f \in \mathcal{D}(A)$.

証明. (a) $\Longrightarrow$ (e′) は 定理1.1 の (a) $\Longrightarrow$ (e) の証明において, $f \wedge e$ の代りに Uf を代入すれば, そのままなりたつ

ことがわかる。(e') $\Longrightarrow$ (a) の証明. $0 \leq g \leq \alpha$, $f = G_\alpha g$ とすると,

$$\beta_0 \|f - Uf\| \geq \sigma(f - Uf, \alpha f - g)$$
$$= \sigma(f - Uf, \alpha(f - Uf)) + \alpha\,\sigma\left(f - Uf, Uf - \frac{g}{\alpha}\right).$$

ところが

$$\{-(f - Uf)\} \vee (Uf - g\alpha^{-1}) \geq 0$$

だから右辺の最後の項は正. したがって $\beta_0 \|f - Uf\| \geq \alpha \|f - Uf\|$. これより $f = Uf$ を得る. (c) $\Longleftrightarrow$ (c') の証明も同様である.

§2 Dirichlet space.

以後, Banach 束は Hilbert 空間になっており, その内積は次の条件をみたすとする.

$$(2.1) \quad \begin{array}{lll} f, g \geq 0 & \Longrightarrow & (f, g) \geq 0 \\ |f| \wedge |g| = 0 & \Longrightarrow & (f, g) = 0. \end{array}$$

L^2-空間は代表的な例である. H を X の dense な linear subspace $\mathcal{D}(H)$ で定義された bilinear form で上に有界であるとする. すなわち, ある $\beta_0 \geq 0$ があって

$$H(u, u) + \beta_0 (u, u) \geq 0, \qquad \forall u \in \mathcal{D}(H).$$

更に, H が

条件(C). $|H(u,v)| \leqq K H_{\beta_0}(u,u)^{\frac{1}{2}} H_{\beta_0}(v,v)^{\frac{1}{2}}, \ \forall u, v \in \mathcal{D}(H)$
をみたす定数 K が存在する

をみたすとき, H は連続な bilinear form という. ただし

$$(2.2) \qquad H_\alpha(u,v) \equiv H(u,v) + \alpha(u,v)$$

である.

$$(2.3) \qquad \langle u,v\rangle_\alpha = \frac{1}{2}\{H_\alpha(u,v) + H(v,u)\}, \quad \alpha > \beta_0$$

とおくと, $\mathcal{D}(H)$ は内積 $\langle\ ,\ \rangle_\alpha$ によって pre-Hilbert 空間である. $\mathcal{D}(H)$ のノルム $|||u|||_\alpha = \langle u,u\rangle_\alpha^{\frac{1}{2}}$ による完備化を $\mathcal{X}_\alpha$ とおく. $|||\ |||_\alpha \geqq (\alpha-\beta_0)\|u\|$ だから $\mathcal{X}_\alpha \subset X$. 更に各 $|||\ |||_\alpha$ $\alpha > \beta_0$ は同値なノルムだから $\mathcal{X}_\alpha$ は α に無関係. 以下 $\mathcal{X} = \mathcal{X}_\alpha$ とおく.

Proposition 2.1. H を, 条件(C) をみたす下に有界な bilinear form とする. このとき, (T.1) ~ (T.3) をみたす semigroup T_t で, その infinitesimal generator A が

$$(2.4) \qquad H(u,v) = -(u, Av), \quad \forall u \in \mathcal{X}, \ \forall v \in \mathcal{D}(A)$$

をみたすものが唯一つ定まる.

証明　まず $f\in X$ に対し，$H_\alpha(u,v)=(u,f)$，$\forall u\in\mathcal{H}$ をみたす v が唯一つ存在することを示す．

$$|(f,u)|\leq \|f\|\,\|u\|\leq \alpha^{-1}\|f\|\,\|u\|_{\alpha+\beta_0}$$

だから Riesz の定理によって，$\langle u, v^0\rangle_{\alpha+\beta_0}=(u,f)$，$\forall u\in\mathcal{H}$ をみたす v^0 が存在する．一方仮定(c)より

$$|H_\alpha(u,v)|\leq K\,H_{\alpha+\beta_0}(u,u)^{\frac{1}{2}}H_{\alpha+\beta_0}(v,v)^{\frac{1}{2}}$$

$$|H_\alpha(u,u)|\geq(\alpha-\beta_0)\alpha^{-1}H_{\alpha+\beta_0}(u,u)$$

をみたすことが容易にわかる．ゆえに Lax-Milgram の定理によって，$H_\alpha(u,v)=\langle u,v^0\rangle_{\alpha+\beta_0}$，$\forall u\in\mathcal{H}$ をみたす $v\in\mathcal{H}$ が唯一つ存在する．この v は明らかに $H_\alpha(u,v)=(u,f)$ をみたす．v の一意性は，$H_\alpha(u,v)=0$，$\forall u\in\mathcal{H}$ から $v\equiv 0$ がしたがうことから明らか．

上に求めた v を $G_\alpha f$ と書くと，G_α は resolvent equation をみたすから，$\mathcal{R}(G_\alpha)$ は $\alpha>\beta_0$ で α に無関係．$\mathcal{D}(A)\equiv\mathcal{R}(G_\alpha)$ の元 u に対し $Au\equiv\alpha u-G_\alpha^{-1}u$ は再び α に無関係かつ A は(2.4)をみたす．

逆に A が dense な domain $\mathcal{D}(A)$ で定義された linear operator で $(u,Au)\leq\beta_0\|u\|^2$（β_0 はある定数）をみたすとする．$H(u,v)=-(u,Av)$ とおけば H は下に有界な bilinear form である．したがって，もしこの H が条件(c)をみたせば，Prop. 2.1 によって，A のある closed extension $\bar{A}$ で，ある semigroup の infinitesimal generator と一致するも

のが存在する．したがって，条件(C)の下で，Xの dense な linear subspace の上に定義された下に有界な bilinear form と (T.1)〜(T.3) をみたす semigroup は 1−1 対応する．Hを semigroup に対応した bilinear form ということにする．

定理2.1　HをXの dense な linear subspace で定義された下に有界かつ条件(C)をみたす bilinear form とする．このとき次の条件は同値．

(1)　Hは submarkov semigroup に対応する．

(2)　$\mathcal{D}$はXの complete sub vector 束で，$\forall f \in \mathcal{D}$ に対し

$$H(f-Uf,\ Uf) \geq 0 \tag{2.5}$$

をみたす．

系　(2.5) と同値な条件を列記する．

(3)　$H(f-Uf,\ f) \geq -\beta_0 \|f-Uf\|^2$

(4)　$H(f-Uf,\ f+Uf) \geq -\beta_0 \|f-Uf\|^2$

(5)　$H((f-c)^+,\ f \wedge c) \geq 0,\quad \forall c \geq 0$

(6)　$H((f-c)^+,\ f) \geq -\beta_0 \|(f-c)^+\|^2,\quad \forall c \geq 0$

(7)　$H((f-c)^+,\ f+f\wedge c) \geq -\beta_0 \|(f-c)^+\|^2,\quad \forall c \geq 0.$

注意　Hが正値 bilinear form のとき，(4) は $H(f-Uf,\ f+Uf) \geq 0$ で，これは M. Ito [　] によって得られている．

11

この定理の証明のために、次の3つのLemmaが必要。

<u>Lemma 2.1.</u> Aはsub markov semigroupのinfinitesimal generatorとする。更にAに対応するsemigroup T_tは$\|T_t\| \le e^{\beta_0 t}$をみたすとする。このとき$A^\beta = A\beta G_\beta$ $(\beta > \beta_0)$は又sub markov semigroupのinfinitesimal generatorである。

証明. A^βがcompletely dispersiveであることのみ示せばよい。$A^\beta f = \beta(\beta G_\beta f - f)$だから

$$((f-c)^+, A^\beta f) = \beta((f-c)^+, (\beta G_\beta - I)(f-c)^+) + \beta((f-c)^+, (\beta G_\beta - I) f \wedge c)$$

$$\le \beta_0(1-\beta_0/\beta)^{-1}\|(f-c)^+\| + \beta((f-c)^+, (\beta G_\beta - I) f \wedge c).$$

第二項は、$(f-c)^+ \wedge \{(\beta G_\beta - I) f \wedge c\} \le 0$だから(2_1)によって負になる。したがって

$$((f-c)^+, A^\beta f) \le \beta_0(1-\beta_0/\beta)^{-1}\|(f-c)^+\|^2.$$

一方$\nu(f,g) = \|f\|^{-1}(f,g)$はProp. 1.1の諸性質をもつから、$A^\beta$はcompletely dispersiveである。

<u>Lemma 2.2.</u> $H^\beta(u,v) = -(u, A^\beta v)$, $u_\beta = \beta G_\beta u$ とおくと

(i) $H(u_\beta, u_\beta) \le H^\beta(u,u)$

(ii) $|H^\beta(u,v)| \le K\, H_\alpha(u,u)^{\frac{1}{2}}\, H^\beta_\alpha(v,v)^{\frac{1}{2}}$ if $u \in \mathcal{X}$, $\alpha \ge \frac{\beta\beta_0}{\beta-\beta_0}$

(iii) $|H^\beta(u,v)| \le K\, H^\beta_\alpha(u,u)^{\frac{1}{2}}\, H_\alpha(v,v)^{\frac{1}{2}}$ if $v \in \mathcal{X}$, $\alpha \ge \frac{\beta\beta_0}{\beta-\beta_0}$

ただし K は条件(c)の定数である。(α, βに無関係)

<u>証明</u>

(2.6) $H(u, v_\beta) = -(u, A^\beta v) = H^\beta(u, v)$

特に $u = v_\beta = u_\beta$ のとき

(2.7) $H(u_\beta, u_\beta) = H^\beta(u_\beta, u) = H^\beta(u, u) - H^\beta(u - u_\beta, u)$

$$= H^\beta(u, u) + (u - u_\beta, \beta(u_\beta - u)) \leqq H^\beta(u, u).$$

次に (ii) の証明。条件 (c) より

$$|H^\beta(u, v)| = |H(u, v_\beta)| \leqq K\, H_{\beta_0}(u, u)^{\frac{1}{2}} H_{\beta_0}(v_\beta, v_\beta)^{\frac{1}{2}}$$

一方

$$H_{\beta_0}(v_\beta, v_\beta) = H(v_\beta, v_\beta) + \beta_0 \|v_\beta\|^2 \leqq H^\beta(v, v) + \frac{\beta_0\beta}{\beta - \beta_0} \|v\|^2$$

$$\leqq H^\beta_\alpha(v, v).$$

ゆえに (ii) が証明された。(iii) は $H^\beta(u, v) = H(u^*_\beta, u)$, $u^*_\beta = \beta G^*_\beta u$

を使って (i), (ii) と同様の議論をくり返せばよい。

<u>*Lemma* 2.3</u> (a) $u \in \mathfrak{X} \iff \sup_\beta H^\beta(u, u) < \infty$

(b) $u, v \in \mathfrak{X} \implies \exists \lim_{\beta \to \infty} H^\beta(u, v) = H(u, v)$

証明。a) $\Rightarrow$。*Lemma* 2.2 の (ii) から $H^\beta(u, u) \leqq K\, H^\beta_\alpha(u, u)^{\frac{1}{2}} H_\alpha(u, u)^{\frac{1}{2}}$

ゆえに $\sup_\beta H^\beta(u, u) < \infty$ でなければならない。

a) $\Leftarrow$ *Lemma* 2.2 (i) により $\sup H(u_\beta, u_\beta) < \infty$。したがって $\{u_\beta\}$

は $||| \ |||_\alpha$ - norm で一様有界. ゆえに $\{u_\beta\}$ のある部分列 $\{u_{\beta_n}\}$ は $u' \in \mathcal{X}$ に $||| \ |||_\alpha$ - 位相で弱収束する. 一方 $\{u_{\beta_n}\}$ は $\| \ \|$-norm で u に強収束するから $u' = u$, 即ち $u \in \mathcal{X}$ である.

つぎに (e) の証明. 上の議論によって, u_β は $\beta \to \infty$ のとき u に $||| \ |||_\alpha$ - 位相で弱収束する. H の連続性に注意して (2.6) において, $\beta \to \infty$ とすると (e) を得る.

定理2.1 の証明 $(1) \Rightarrow (2)$ $\mathcal{X}$ が complete subvector 束であることを示すには, $f \in \mathcal{X} \Rightarrow Uf \in \mathcal{X}$ を示せば十分である.

Lemma 2.2 の (iii) より

$$H^\beta(f-Uf, f) \leqq K\, H^\beta_\alpha(f-Uf, f-Uf)^{\frac{1}{2}} H_\alpha(f,f)^{\frac{1}{2}}.$$

一方 Lemma 2.1 によって

$$H^\beta(f-Uf, f-Uf) \leqq H^\beta(f-Uf, f).$$

上の二つの不等式から $H^\beta(f-Uf, f-Uf) \leqq K\, H^\beta_\alpha(f-Uf, f-Uf)^{\frac{1}{2}} H_\alpha(f,f)^{\frac{1}{2}}$ を得る. ゆえに $\sup_\beta H^\beta(f-Uf, f-Uf) < \infty$. ゆえに Lemma 2.3 (a) より $f-Uf \in \mathcal{X}$, 即ち $Uf \in \mathcal{X}$ である. 次に (2.5) を証明する.

定理1.1′ の (c′) 及び Lemma 2.1 によって

$$H^\beta(f-Uf, Uf) = -(f-Uf, A^\beta Uf) \geqq 0.$$

$\beta \to \infty$ とすれば, Lemma 2.3 (e) によって (2.5) を得る.

$(2) \Rightarrow (1)$ の証明. $f \in \mathfrak{D}(A)$ のとき

$$-(f-Uf, Af) = H(f-Uf, f) = H(f-Uf, f-Uf) + H(f-Uf, Uf)$$
$$\geqq H(f-Uf, f-Uf) \geqq -\beta_0 \|f-Uf\|^2$$

ゆえに A は completely dispersive である.

<u>定理2.1 系の証明</u> (3) $\Rightarrow$ (2.5). H に対応する generator A が completely dispersive だから明らかに. (2.5) $\Rightarrow$ (3).

$$H(f-Uf, f) = H(f-Uf, f-Uf) + H(f-Uf, Uf) \geqq H(f-Uf, f-Uf) \geqq -\beta_0 \|f-Uf\|^2$$

(3) $\Rightarrow$ (4). (2.5) と (3) の両辺を加えればよい. (4) $\Rightarrow$ (3).

$$H(f-Uf, f) = \frac{1}{2}\{H(f-Uf, f+Uf) + H(f-Uf, f-Uf)\}$$
$$\geqq -\beta_0 \|f-Uf\|^2$$

(2) と (5) の同値性は, 定理2.1 の証明において, Uf の代りに $f \wedge c$ を代入すれば, そのまま成立することからわかる.
(5), (6), (7) の同値性は上の議論と同じ.

<u>注意1.</u> H が定理2.1 の条件をみたす bilinear form とする. H に対応する semigroup が positive 即ち (T.4) をみたすための必要十分条件は, $\mathfrak{X}$ が subvector 束かつ, $H(f^+, f^-) \geqq 0$, $\forall f \in \mathfrak{X}$ をみたすことである. 証明はほとんど同じ.

<u>注意2</u> H が定理2.1 をみたす <u>正値</u> bilinear form とする. H に対応する semigroup 及びその adjoint semigroup が共に sub markov ならば, $\mathfrak{X}$ は Dirichlet space になる. 即ち, $\mathfrak{X}$ は complete subvector 束 かつ

$$H(f, f) \geqq H(Uf, Uf) \qquad \forall f \in \mathfrak{X}$$

をみたす. 実際, 定理2.1 の系 (4) より

$$H(f-Uf,\ f+Uf)\geqq 0,\quad H(f+Uf,\ f-Uf)\geqq 0.$$

上式の両辺を加えて整理すれば，$H(f,f)\geqq H(Uf,Uf)$ が得られる．

§3. 補足

ポテンシャル論のある部分は，束の言葉でのべることが出来る．以下のべることは，X が functional space のとき M. Ito [7] によって得られた．

H は§2の条件(i)をみたす正値 bilinear form で更に次の条件(D)をみたすとする．

条件(D). X の dense な f に対し $H(u,v)=(u,f)$, $\forall u\in\mathfrak{X}$ をみたす $v\in\mathfrak{X}$ が唯一つ存在する．

上の v を Gf と書き，以下 D は $Gf\in\mathfrak{X}$ が存在する f の全体とする．次の関係式は容易にわかる．

$$G_\alpha f-Gf+\alpha GG_\alpha f=0,$$

即ち $f\in D$ なら $G_\alpha f\in D$ かつ上式をみたす．

定義 (i) G が最大値の原理をみたすとは D の各元 $f,g\geqq 0$ に対し

$$[G(g-f)]^+\wedge g=0\ \Longrightarrow\ [G(g-f)]^+=0.$$

(ii). G が完全最大値の原理をみたすとは，D の各元

$f, g \geq 0$ と各 $a \geq 0$（定数）に対し

$$[G(g-f)-a]^+ \wedge g = 0 \Rightarrow [G(g-f)-a]^+ = 0.$$

<u>Proposition 3.1</u>　(i) Gが最大値の原理をみたすための条件は

(3.1)　$[Gf]^+ \wedge f^+ = 0 \Longrightarrow [Gf]^+ = 0$

が各$f \in D$について成立すること。

(ii). Gが完全最大値の原理をみたすための条件は

(3.2)　$[Gf-a]^+ \wedge f^+ = 0 \Longrightarrow [Gf-a]^+ = 0$

が各$f \in D$について成立すること。

<u>証明</u>. (i)のみを示す. 必要条件は, 最大値の原理の定義において, $g \to f^+$, $f \to (-f)^+$ を代入すればよい. 十分条件は $(g-f)^+ = g - g \wedge f \leq g$ ゆえに

$$[G(g-f)]^+ \wedge g = 0 \Rightarrow [G(g-f)]^+ \wedge (g-f)^+ = 0 \Rightarrow [G(g-f)]^+ = 0.$$

<u>定理3.1</u>. Hは条件(C), (D)をみたす正値 bilinear form とする.

(i) Gが完全最大値の原理をみたすための必十条件は, 定理2.1の(1)又は(2)をみたすことである.

(ii) Gが最大値の原理をみたすための条件は, Hが§1の注意の性質をもつことである.

証明.　まず"最大値の原理"$\Longrightarrow$"$G \geq 0$"を示す.

$f \leqq 0$ のとき,

$$[G(f-\alpha G_\alpha f)]^+ \wedge [f-\alpha G_\alpha f]^+ \leqq [G(f-\alpha G_\alpha f)]^+ \wedge [-\alpha G_\alpha f]^+$$
$$\leqq [G_\alpha f]^+ \wedge [-\alpha G_\alpha f]^- = 0$$

ゆえに $[G(f-\alpha G_\alpha f)]^+ = 0$, 即ち $[G_\alpha f]^+ = 0$. 次に完全最大値の原理と, $0 \leq f \leq e$ より $\alpha G_\alpha f \leqq e$ を示すべく.

$$[-e+G(\alpha f-\alpha^2 G_\alpha f)]^+ \wedge (f-\alpha G_\alpha f)^+ \leqq [\alpha G_\alpha f-e]^+ \wedge [e-\alpha G_\alpha f]^+ = 0.$$

ゆえに $[\alpha G_\alpha f-e]^+ = 0$.

次に G_α が sub markov から完全最大値の原理を示す.
$[Gf-a]^+ \wedge f^+ = 0$ とする.

$$H([Gf-a]^+, [Gf-a]^+)$$
$$= 2H([Gf-a]^+, Gf) - H([Gf-a]^+, Gf+a\wedge Gf)$$

定理 2.1 の系より $H([Gf-a]^+, Gf+a\wedge Gf) \geqq 0$ だから

$$H([Gf-a]^+, [Gf-a]^+) \leqq 2H([Gf-a]^+, Gf)$$
$$= ([Gf-a]^+, f) \leqq ([Gf-a]^+, f^+) = 0$$

ゆえに $[Gf-a]^+ = 0$.

反射壁をもつ diffusion semigroup.

R^n の domain D で定義された二階楕円型微分作用素

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \equiv \Delta u + \sum b_i \frac{\partial u}{\partial x_i}$$

を考える。ただし，a_{ij} は symmetric, uniformly elliptic, bdd, measurable, b_i は bdd measurable とする。D 上の Lebesgue 測度に関する実 L_2-空間を L_2 と書く。

$$\mathcal{E} = \{ f \in L_2 ; \quad \frac{\partial f}{\partial x_i} \in L_2, \ i=1,\cdots,n\}$$

$$\mathcal{E}(f, g) = \int \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial x_i}\, dx, \qquad D(f, g) = \int \sum a_{ij}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial x_j}\, dx$$

と書く。

定理3.2 $\mathcal{D}(A) = \{u \in \mathcal{E} ; \ \Delta u \in L^2$ かつ $D(u, v) + (\Delta u, v) = 0, \ \forall v \in \mathcal{E}\}$ とおき，L の $\mathcal{D}(A)$ への制限を A と書けば，A は L^2 上の submarkov semigroup の infinitesimal generator.

この semigroup を反射壁をもつ diffusion semigroup という。

証明. $u, v \in \mathcal{D}(A)$ に対し

$$H(u, v) \equiv -(u, Av) = D(u, v) - \left(\sum b_i \frac{\partial v}{\partial x_i}, u\right)$$

とおくと，H は下に有界な bilinear form である。実際，

$$\left|2\left(\sum b_i \frac{\partial u}{\partial x_i}, u\right)\right| \leq \nu\, \mathcal{E}(u, u) + \nu^{-1} C \|u\|^2, \qquad C = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in D,\, i=1,\cdots,n} |b_i(x)|$$

一方 $D(u, u) \geq K\, \mathcal{E}(u, u)$ をみたす $K > 0$ が存在するから

$$H(u,u) \geqq K\,\mathcal{E}(u,u) - \tfrac{1}{2}\nu\,\mathcal{E}(u,u) - \tfrac{1}{2}\nu^{-1}c\|u\|^2 \geqq -\beta_0\|u\|^2.$$

ただし，$K \geqq \frac{1}{2}\nu > 0$，$\beta_0 = 2\nu^{-1}C$ をみたす様に ν, β_0 を選べば，更に，

$$|H(u,v)| \leq D(u,u)^{\frac{1}{2}} D(v,v)^{\frac{1}{2}} + c\,\mathcal{E}(v,v)^{\frac{1}{2}}\|u\|$$

$$\leq D(u,u)^{\frac{1}{2}} D(v,v)^{\frac{1}{2}} + \beta_0 D(v,v)^{\frac{1}{2}}\|u\|^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \{D(u,u) + \beta_0(u,u)\}^{\frac{1}{2}}\{D(v,v) + \beta_0(v,v)\}^{\frac{1}{2}}.$$

ゆえに H は連続な bilinear form である．一方 明らかに

$$H(f - Uf, Uf) = D(f - Uf, Uf) + \left(\sum b_i \frac{\partial Uf}{\partial x_i},\ f - Uf\right) = 0, \quad \forall f \in \mathcal{E}$$

したがって，定理3.1 によって，H に対応する submarkov semigroup がただ一つ存在する．

H に対応する semigroup の generator を $\bar{A}$ とする．$\bar{A}$ は L の制限になっている．実際，$(-\bar{A}u, v) = H(u,v) = D(u,v) - (b_i \frac{\partial u}{\partial x_i}, v)$ が $u \in \mathcal{D}(\bar{A})$，$v \in \mathcal{E}$ で成立するから，特に $v \in C_0^\infty$ とすれば $\bar{A}u = Lu$ であることがわかる．

次に $\mathcal{D}(\bar{A}) = \mathcal{D}(A)$ を示す．$u \in \mathcal{D}(\bar{A})$ とすれば，

$$H_\alpha(u,v) = D(u,v) - \left(\sum b_i \frac{\partial u}{\partial x_i}, v\right) + \alpha(u,v)$$

$$= \alpha(u,v) - (\Delta u, v) - \left(\sum b_i \frac{\partial u}{\partial x_i}, v\right) \qquad \forall v \in \mathcal{E}$$

即ち $D(u,v) + (\Delta u, v) = 0$ が $\forall v \in \mathcal{E}$ で成立．ゆえに $\mathcal{D}(\bar{A}) \subset \mathcal{D}(A)$ である．$\mathcal{D}(\bar{A}) \supset \mathcal{D}(A)$ は明らか．

文 献

[1] M. Hasegawa, On contraction semi-groups and (di)-operator, J. Math. Soc. Japan, 18(1966), 290-302

[2]. M. Ito, A note on Extended regular functional spaces, Proc. Japan Acad. 43(1969), 435-440.

[3]. R.S. Phillips, Semigroups of positive contraction operators, Czechoslovak Math. J. 12(87), (1962) 294-313.

[4]. K. Sato, On the generators of non-negative contraction semi-groups in Banach lattice, to appear in J. Math. Soc. Japan.

[5]. K. Yosida, Functional analysis, Springer 1966.